ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
25. siječnja 2018.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Racionalizirajmo razlomke:

$$\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}}{\sqrt{15}-\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}}{2},$$ 1 BOD

$$\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{2}.$$ 1 BOD

Zadnji razlomak zapišimo malo drugačije:

$$\frac{\sqrt{5.5}-\sqrt{7.5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}-\sqrt{\frac{15}{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{11}-\sqrt{15}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{15}}{2}.$$ 2 BODA

(Ili:

$$\frac{\sqrt{5.5}-\sqrt{7.5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{15}}{2}.$$ 2 BODA)

Na kraju zbrojimo sve dobiveno:

$$\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}-\frac{\sqrt{5.5}-\sqrt{7.5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}}{2}+\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{2}-\frac{\sqrt{11}-\sqrt{15}}{2}=\sqrt{15}.$$ 2 BODA

……………………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Neka su v_1 i s_1 odnosno v_2 i s_2 količine vode i soka u prvoj odnosno drugoj boci, a V volumen svake od dviju boca.

Tada vrijedi:

$$v_1 : s_1 = 2 : 1 \text{ i } v_2 : s_2 = 4 : 1,$$

odnosno

$$v_1 = \frac{2}{3}V \text{ i } s_1 = \frac{1}{3}V,$$ 1 BOD

$$v_2 = \frac{4}{5}V \text{ i } s_2 = \frac{1}{5}V.$$ 1 BOD

Ukupna količina vode iz obiju boca je

$$v_3 = v_1 + v_2 = \frac{22}{15}V,$$ 1 BOD

a ukupna količina soka iz obiju boca je

$$s_3 = s_1 + s_2 = \frac{8}{15}V.$$ 1 BOD

Omjer količina vode i soka u trećoj boci je $v_3 : s_3 = \frac{22}{15}V : \frac{8}{15}V = 11 : 4$. 2 BODA

………………………………………………………………...…...….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

U prvoj boci ima $\frac{1}{3}$ udjela soka, a u drugoj $\frac{1}{5}$ udjela soka. 2 BODA

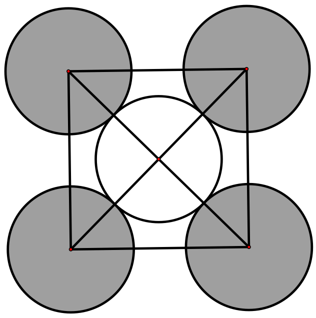
Kako su volumeni prve i druge boce jednaki, slijedi da u trećoj boci ima $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{2}=\dfrac{4}{15}$ udjela soka.

2 BODA

Udio vode je $\frac{11}{15}$, a omjer količine vode i soka je 11 : 4. 2 BODA

…………………………………………………………………………....…. UKUPNO 6 BODOVA

3.



Neka je r duljina polumjera sukladnih kružnica.

Duljina dijagonale d kvadrata je $4r$. 1 BOD

Površina kvadrata je $P_1 = \dfrac{d^2}{2}=\dfrac{16r^2}{2}=8r^2$. 1 BOD

Površina svih zatamnjenih krugova je $4r^2\pi$. 1 BOD

Unutar kvadrata nalaze se 4 četvrtine zatamnjenih sukladnih krugova odnosno zatamnjeni dio ima površinu jednaku površini jednog kruga radijusa r, dakle $r^2\pi$. 1 BOD

Površina nezatamnjenog dijela kvadrata je $P_1-r^2\pi=8r^2-r^2\pi=r^2(8-\pi)$. 1 BOD

Tada je omjer površine svih zatamnjenih krugova i površine nezatamnjenog dijela kvadrata jednak

$\dfrac{4r^2\pi}{r^2(8-\pi)}=\dfrac{4\pi}{8-\pi}$. 1 BOD

…………………………………………………………………….…...…… UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

Ukupan broj kuglica je 1000.

Među prvih 1000 prirodnih brojeva ima ih 250 djeljivih s 4, 1 BOD

i 166 djeljivih sa 6. 1 BOD

Međutim, postoje brojevi koji su djeljivi i s 4 i sa 6.

To su višekratnici broja 12. Njih ima 83. 1 BOD

Dakle, ukupan broj brojeva koji nisu djeljivi ni s 4 ni sa 6 je

1000 – 250 – 166 + 83 = 667. 2 BODA

(Ili:

Ukupan broj brojeva koji su djeljivi s 4 ili s 6 je 250 + 166 – 83 = 333. 1 BOD

Brojeva koji nisu djeljivi ni s 4 ni sa 6 ima 1000 – 333 = 667. 1 BOD)

Tražena vjerojatnost je $\frac{667}{1000} = 66.7\,\%$. 1 BOD

…………………………………………………………………………….…...….. UKUPNO 6 BODOVA

5. Neka je $m = \left|n^2 - 100\right|$.

Vrijedi $m = \left|n^2 - 100\right| = \left|(n-10)(n+10)\right|$. 1 BOD

Broj m je prost ako i samo ako je jedan od brojeva $\left|n-10\right|$ i $\left|n+10\right|$ jednak 1, a drugi je prost broj.

1 BOD

Uočimo da nema prirodnih brojeva n za koje je $\left|n+10\right| = 1$. 1 BOD

Nađimo sve prirodne brojeve n za koje je $\left|n-10\right| = 1$.

Ako je $\left|n-10\right| = 1$, tada je $n = 9$ ili $n = 11$.

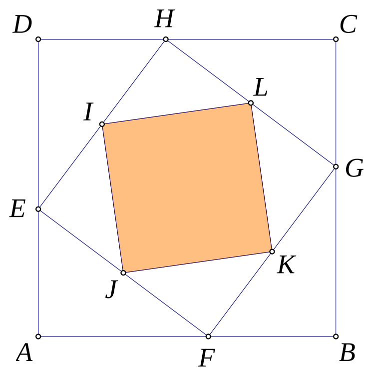
Za $n = 9$ je $m = \left|(n-10)(n+10)\right| = 19$, što je prost broj. 1 BOD

Za $n = 11$ je $m = \left|(n-10)(n+10)\right| = 21$, a to nije prost broj. 1 BOD

Dakle, postoji samo jedan prirodan broj n za koji je $\left|n^2 - 100\right|$ prost broj, a to je $n = 9$. 1 BOD

…………………………………………………………………………….…. UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:



Iz površine kvadrata *IJKL* možemo izračunati duljinu stranice tog kvadrata. Označimo duljinu stranice kvadrata *IJKL* s y. Iz uvjeta zadatka vrijedi:

$y^2 = 200$, pa je $y = 10\sqrt{2}$ cm. 2 BODA

Duljinu stranice kvadrata *EFGH* označimo s a. Neka je $x = \frac{a}{2}$. Tada vrijedi:

$y = x\sqrt{2}$, pa je $10\sqrt{2} = x\sqrt{2}$, odnosno $x = 10$ cm. 2 BODA

Duljina stranice kvadrata *EFGH* iznosi $a = 20$ cm. 1 BOD

Omjer kateta pravokutnog trokuta *AFE* je 3 : 4. Neka je $\left|EA\right| = 3k$ i $\left|AF\right| = 4k$.

Prema Pitagorinom poučku vrijedi $(3k)^2 + (4k)^2 = 20^2$, 1 BOD

pa je $25k^2 = 400$, odnosno $k^2 = 16$, $k = 4$. 2 BODA

Duljina stranice kvadrata *ABCD* iznosi $\left|AF\right| + \left|FB\right| = \left|AF\right| + \left|EA\right| = 16 + 12 = 28$ cm. 1 BOD

Površina kvadrata *ABCD* iznosi $p_{ABCD} = 28^2 = 784$ cm². 1 BOD

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Nacrtajmo dijagonale $\overline{IK}$ i $\overline{JL}$ kvadrata *IJKL*. Neka se te dijagonale sijeku u točki S.
Njima smo kvadrat *IJKL* podijelili na 4 sukladna trokuta *IJS, JKS, KLS* i *LIS.*
(Dijagonale kvadrata su jednake i raspolavljaju se, stranice kvadrata su jednake, pa tvrdnja slijedi po poučku SSS.) 1 BOD

Trokuti *IEJ*, *JFK*, *KGL* i *LHI* su jednakokračni pravokutni. I oni su sukladni jer su im katete jednake polovini stranice kvadrata *EFGH* (po poučku SKS). 1 BOD

Također vrijedi da su svi trokuti *IJS, JKS, KLS, LIS, IEJ, JFK, KGL* i *LHI* međusobno sukladni, jer su jednakokračni pravokutni i imaju jednake hipotenuze. 1 BOD

Dakle, za površine kvadrata *EFGH* i *IJKL* vrijedi:

$p_{EFGH} = 8p_{IEJ}$, $\quad p_{IJKL} = 4p_{IEJ}$,

$p_{EFGH} = 2p_{IJKL} = 2 \cdot 200 = 400\,\text{cm}^2$. 1 BOD

Prema tome, duljina stranice kvadrata *EFGH* iznosi 20 cm. 1 BOD

Omjer kateta pravokutnog trokuta *AFE* je 3 : 4. Neka je $|EA| = 3k$ i $|AF| = 4k$.

Prema Pitagorinom poučku vrijedi $(3k)^2 + (4k)^2 = 20^2$, 1 BOD

pa je $25k^2 = 400$, odnosno $k^2 = 16$, $k = 4$. 2 BODA

Duljina stranice kvadrata *ABCD* iznosi $|AF| + |FB| = |AF| + |EA| = 16 + 12 = 28\,\text{cm}$. 1 BOD

Površina kvadrata *ABCD* iznosi $p_{ABCD} = 28^2 = 784\,\text{cm}^2$. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Ako je x srednji broj po veličini, onda sve brojeve možemo zapisati kao
$x - 2$, $x - 1$, x, $x + 1$ i $x + 2$. 1 BOD

Tada je

$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 =$

$= x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 =$ 1 BOD

$= 5x^2 + 10 = 5(x^2 + 2)$. 2 BODA

Izraz $5(x^2 + 2)$ je djeljiv brojem 5. 1 BOD

Kada bi izraz $5(x^2 + 2)$ bio djeljiv brojem 25, faktor $x^2 + 2$ bi morao biti djeljiv brojem 5. 1 BOD

Dakle, $x^2 + 2 \in \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$, tj. $x^2 \in \{3, 8, 13, 18, \ldots\}$. 2 BODA

Budući da kvadrat prirodnog broja nikada ne završava znamenkom 3 ni znamenkom 8, faktor $x^2 + 2$ nije djeljiv brojem 5, što znači da izraz $5(x^2 + 2)$ nije djeljiv s 25. 2 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako je x najmanji broj po veličini, onda sve brojeve možemo zapisati kao
x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ i $x + 4$. 1 BOD

Tada je

$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 =$

$= x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 =$ 1 BOD

$= 5x^2 + 20x + 30 = 5(x^2 + 4x + 6)$. 2 BODA

Izraz $5(x^2 + 4x + 6)$ je djeljiv brojem 5. 1 BOD

Kada bi izraz $5(x^2+4x+6)$ bio djeljiv brojem 25, faktor x^2+4x+6 bi morao biti djeljiv brojem 5.

1 BOD

Ako je x djeljiv s 5, onda x^2+4x+6 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5.
Ako je x oblika $5k+1$ za neki prirodan broj k, onda x^2+4x+6 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5.
Ako je x oblika $5k+2$ za neki prirodan broj k, onda x^2+4x+6 daje ostatak 3 pri dijeljenju s 5,
Ako je x oblika $5k+3$ za neki prirodan broj k, onda x^2+4x+6 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5.
Ako je x oblika $5k+4$ za neki prirodan broj k, onda x^2+4x+6 daje ostatak 3 pri dijeljenju s 5.

3 BODA

Dakle, x^2+4x+6 nije djeljiv brojem 5, pa izraz $5(x^2+4x+6)$ nije djeljiv s 25. 1 BOD

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Za svaku netočnu ili nenapisanu tvrdnju (od gornjih pet), oduzeti po 1 BOD (od ukupno 3 BODA za taj dio rješenja), što znači: za svih 5 točnih tvrdnji dati 3 BODA, za 4 tvrdnje 2 BODA, za 3 tvrdnje 1 BOD, a za dvije, jednu ili nijednu točno napisanu tvrdnju 0 BODOVA.